TIEMPO

Copyright	1998, ***Bayes*** Inference, S.A.
Título	TIEMPO
Asunto	Diseño de una representación del tiempo
Clave	TIPO DE DOCUMENTO NOTA12
Archivo	o:\bayes\concept\tiempo\tiempor.doc
Edición	05/07/96 13:16
Impresión	0/0/00 0:00
Distribución	Interna

1. El Tiempo

La utilidad de una representación del tiempo se deriva de la **necesidad de dotar de una indexación universal a los acontecimientos que registramos**, de forma que podamos investigar las relaciones dinámicas entre distintas secuencias de datos. Éstos se producen en **frecuencias** muy **diferentes**, poseen **interrupciones** y están afectados por lo que denominamos características del ***tiempo social***. De hecho, el registro de la información dinámica en frecuencias muy distintas y la ausencia de registro en ciertos periodos, lejos de ser un *defecto* de origen socio-histórico, es un instrumento para maximizar la cantidad de información disponible en cierto espacio. En suma, una representación lógica del tiempo es necesaria para:

- construir un índice universal que precise las relaciones de precedencia temporal entre los datos, algo tanto más necesario cuanto más abundantes sean éstos,
- manejar frecuencias distintas, posiblemente irregulares y con periodos de inactividad,
- transferir el contenido del tiempo social y los sucesos cualitativos cuyo perfil temporal conocemos al análisis de los datos y
- maximizar el contenido informativo en sucesos dinámicos de gran dimensión y complejidad.

Casi toda la teoría de procesos estocásticos supone una indexación uniforme, bien que se trate de procesos discretos indexados en los naturales o los enteros, bien que se trate de procesos continuos con indexación en la recta real. En la práctica de la modelización encontramos estructuras temporales que acogen ciertos tipos de sucesos que contienen incertidumbre y dinamismo propios y que, en general, recorren un cierto subíndice .

Este tipo de sucesos puede representarse mediante el recurso a procesos estocásticos que se combinan mediante álgebras relativas a ciertas estructuras temporales que llamamos fechados.

Aunque las expresiones previas pueden parecer oscuras a aquellos que no conocen todavía el álgebra de tiempo y sus consecuencias en la teoría de procesos, resultará progesivamente clara la pertinencia y necesidad del tipo de conceptos que exponemos en este documento. Estos conceptos abren un campo nuevo a la modelización de procesos estocásticos y en particular a las series temporales reales, aunque sin ninguna duda, tambien los procesos cuyo dominio es una variable discreta pueden beneficiarse de la perspectiva que se propone a continuación.

2. Objeto

Este documento tiene por objeto presentar las ideas del álgebra de tiempo desde el punto de vista de las definiciones y de la posterior implementación computacional. El documento tiene también otro objetivo: facilitar la presentación pedagógica del álgebra temporal, del álgebra de series y de ciertos procesos estocásticos cuya utilidad y existencia resultan claras una vez que se dispone de la estructura Tiempo.

3. La representación discreta del tiempo

La representación discreta del tiempo lo identifica con una colección numerable y ordenada de elementos disjuntos, tales como días, meses, horas o minutos.

En el año 1991 ***Bayes*** desarrolló la representación del tiempo en base diaria. Esta representación ha tenido tres implementaciones software. La primera de ellas constituyó un fracaso técnico y fue abandonada; la segunda fue la implementación ***Bayes Base*** en UNIX y la tercera es la actualmente vigente en **TOL**.

3.1 Tiempo diario : conjuntos básicos

Se establece en primer lugar el conjunto universal C (Calendario) como un conjunto numerable de elementos llamados días, completamente ordenado. Se establece a partir de aquí la función sucesor en C de cualquier elemento y se define recursivamente el sucesor n-ésimo de un elemento cualquiera.

Sea *d* cualquier elemento de C. Entonces Succ(d,n,C), donde n es cualquier entero, es idéntico a la aplicación reiterada n veces de la función Succ(d,1,C). La estructura de conjuntos que se propone a continuación se basa en la especificación gregoriana del calendario.

La representación diaria del tiempo considera la existencia de ciertas familias de conjuntos temporales cuyos elementos son días, tales como:

- M(i), i=1,...,12, donde M(i) es el **conjunto de días** que pertenecen al mes i-ésimo.

- WD(i), i=0,...,6, donde WD(0) representa los domingos, WD(1) el conjunto de los lunes, WD(2) de los martes, y así sucesivamente hasta WD(6) que representa el conjunto de los sábados.[1]
- D(i), i=1,...,31, donde D(i) representa el conjunto de todos los días i-ésimos de cualquier mes.
- W representa el conjunto vacío.
- Y(i), que representa el año i-ésimo en el actual calendario gregoriano.
- Los intervalos cerrados que contienen todos los días entre dos extremos. Cuando el extremo izquierdo es *TheBegin* se indica falta de acotación por la izquierda, mientras que cuando el extremo derecho es *TheEnd* se indica falta de acotación por la derecha. Así In(TheBegin,TheEnd) = C y si el extremo inferior es mayor que el extremo superior el conjunto resultante es *W*.
- Easter que representa el día de la fiesta pascual occidental. La fiesta pascual hebrea y ortodoxa no coinciden necesariamente con la fiesta pascual occidental.

Es interesante observar que puesto que puesto que los elementos de cualquiera de los conjuntos pertenecientes a las anteriores familias son días, precisamos de una forma de denotar a tales elementos. Esta forma es anteponer la letra y (year) al entero que expresa el año al que pertenece, la letra m (month,mes) al entero que expresa el mes y d (day, día) al entero que expresa el día. Así el 26 de Octubre de 1998 se representa como y1998m10d26. Cuando hacemos esto estamos aceptando un tipo de medida del tiempo entre otros posibles. Es claro que otros conjuntos temporales y otros sistemas de medida podría coexistir con el actualmente existente.

3.2 El álgebra del tiempo diario

A la colección de conjuntos descritos la dotamos de las operaciones de **unión**, **intersección** y **diferencia** de conjuntos.

Podemos obtener nuevos conjuntos si a cualquier elemento del ágebra de Boole resultante le aplicamos operadores de traslación.

Así podemos definir el conjunto Succ(Ct, n) como el conjunto obtenido calculando el sucesor enésimo a cada elemento de Ct.

Definimos la función Range(Ct,n,m) como:

$$Range(Ct,n,m) = \bigcup_{i=n}^{m} Succ(Ct,i)$$

Asimismo definimos la función Periodic(Ct,n) como:

[1] La actual implementación TOL usa WD(7) para denotar los domingos. La nomenclatura que se propone es por una parte completamente aceptable en la cultura anglosajona y tampoco repugna en la interpretación latina del ciclo semanal.

$$Periodic(Ct,n) = \bigcup_{i \in I} Succ(Ct, i*n), \quad n \in N^{+}$$

3.3 La notación gregoriana

Cada elemento del conjunto C se representa mediante la notación gregoriana. en esta notación un día particular queda identificado por un año, un mes y un día dentro del mes. Convendremos en denotar cierto día d en el modo siguiente

Sea el conjunto unitario, $\mathrm{Y(i)*M(j)*D(k)}$, donde j,k son enteros válidos. Entonces podemos usar para representar días concretos la letra y (year), seguida del número de año al que pertenece el día a denotar, la letra m (month) seguida del número de mes a que pertenece y la letra d (day) representando el día del mes correspondiente. Son ejemplos de esta representación y1991m11d30, y1988m02d03, y2000m12d8, y2153m1d2.

Se conviene que los elementos en C se denotan con la convención gregoriana, incluso para periodos de tiempo anteriores a la reforma del calendario por el papa Gregorio XIII.

3.4 El indicador de pertenencia

La construcción del indicador de pertenencia,

$$I_A(d) = \begin{cases} 1 & si \quad d \in A \\ 0 & si \quad d \notin A \end{cases}$$

para cada uno de los conjuntos indicados es inmediata en la mayor parte de los casos ya que propia denotación indica la pertenencia a cierto Y(i), a cierto M(j) y a cierto D(k). Asimismo la pertenencia a cierto intervalo puede evaluarse de forma inmediata. Otros conjuntos, como los conjuntos periódicos entre los que, evidentemente se encuentran los pertenecientes a la familia[2] WD precisan de un cálculo menos inmediato. Idéntico comentario merece el conjunto Easter y los conjuntos obtenidos del tipo Succ(Ct,n) y Range(Ct,n,m) definidos en el punto [3.2]. La correspondencia biunívoca con los enteros garantiza que algunos cálculos pueden ser notablemente simplificados si se usa esta correspondencia como intermediario en el cálculo del indicador de pertenencia. Antes de construir esta correspondencia debemos analizar la construcción gregoriana.

---

[2] La familia WD se define obviamente como la clase $WD = \{WD(i) / i = 0,1,...6\}$

Bayes Inference, S.A.
c/ Barco, Nº10, 1ºD, E-28004 MADRID
Tfn (91) 532.74.40, Fax (91) 532.26.36

3.4.1 El sistema gregoriano de medida

Las reglas de la construcción gregoriana son:

Un año se compone de 365 o 366 días consecutivos.

La regla para determinar si un año *x* es bisiesto, es decir tiene 366 días, es:

$$B(x) \Leftrightarrow (Mod(x,4)=0 \wedge \neg Mod(x,100)=0) \vee Mod(x,400)=0$$

Cada mes tiene siempre un idéntico número de días, excepto Febrero que tiene 29 días en el caso de un año bisiesto y 28 en el resto.

3.4.2 La biyección I←→C

```
////////////////////////////////////////////////////////////////////
Real DaysToYear(Real b,Date d)
////////////////////////////////////////////////////////////////////
//
// Esta es una funcion auxiliar: dado el indicador de si el
// año es bisiesto y la fecha el número de días que faltan
// para completar el año
////////////////////////////////////////////////////////////////////
{
 Set DaysToY = SetOfReal(365,337,306,276,245,215,184,153,123,92,
                         62,31);
 Real mes      = Month(d);
 Real DaysMonth = If(LE(mes,2), DaysToY[mes]+b, DaysToY[mes]);
 DaysMonth-Day(d)
};

////////////////////////////////////////////////////////////////////
Set MonthDay(Real b, Real n)
////////////////////////////////////////////////////////////////////
//
// Esta es una funcion auxiliar: dado el indicador de bisiesto y
// un entero menor o igual que 365 (366 si el año es bisiesto)
// devuelve el par (mes, dia)
////////////////////////////////////////////////////////////////////
{
 Set acDaysMonth = SetOfReal(0,31,59,90,120,151,181,212,243,273,
                             304,334,364);
 Set acDaysMonthb = For(1,13,Real (Real k)
                             {GT(k,2)+acDaysMonth[k]});
 Set  nMonth      = Range(1,12,1);
 Set  sMonth      = If(b,
                      Select(nMonth,Real(Real k)
                             {And(GT(n,acDaysMonthb[k]),
                                  LE(n,acDaysMonthb[k+1]))}
```

```
                              ),
                      Select(nMonth, Real(Real k)
                            {And(GT(n,acDaysMonth[k]),
                                 LE(n,acDaysMonth[k+1]))}
                            )
                       );
 Real rMonth        = If(Card(sMonth),sMonth[1],0);
 Real rDay          = If(b,n-acDaysMonthb[(sMonth[1])],
                           n-acDaysMonth[(sMonth[1])]);
 SetOfReal(rMonth,rDay)
};

////////////////////////////////////////////////////////////////////
Real BiyTimeInt(Date d)
////////////////////////////////////////////////////////////////////
//
// Aplica una fecha en un entero
// Tiene como inversa la funcion BiyIntTime(Real r)
////////////////////////////////////////////////////////////////////
{
 Real a               = Year(d);
 Real numPer400       = Floor(a/400);
 Real numPer400orig   = numPer400-5;
 Real r400            = a-numPer400*400;
 Real numPer100       = Floor(r400/100);
 Real r100            = r400-numPer100*100;
 Real numPer4         = Floor(r100/4);
 Real r4              = r100-numPer4*4;
 Real acomplet        = numPer400orig*146097+
                        numPer100*36524+
                        numPer4*1461+
                        r4*365;
 Real b               = Or(Not(r400),And(Not(r4),r100));
 acomplet-DaysToYear(b,d)
};

//////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
Date BiyIntTime(Real r)
//////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
//
// Aplica un entero en una fecha. Su funcion inversa es BiyTimeInt(Date d)
//////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
{
 Real c400 = 146097;
 Real c100 =  36524;
 Real c4   =   1461;
 Real c1   =    365;
 Real a400 = Floor(r/c400);
 Real r400 = r-a400*c400;
 Real a100 = Floor(r400/c100);
 Real r100 = r400-a100*c100;
 Real a4   = Floor(r100/c4);
 Real r4   = r100-a4*c4;
 Real a1   = Floor(r4/c1);
 Real r1   = r4-a1*c1;
 Real b    = Or(LE(c400*a400-c1,r,c400*a400),
                LE(c4*a4-c1,r100,c4*a4));
 Real anC  = 2000+400*a400+100*a100+4*a4+a1;

 Set mD    = If(r1,MonthDay(b,r1),SetOfReal(12,31));
 If(r1,YMD(anC+1,mD[1],mD[2]),YMD(anC,12,31))
};
```

3.5 Sucesor de un conjunto en otro

Definición: Sean dos conjuntos temporales A y M. Definimos el Succ(A,M) como el conjunto de días tales que a cada elemento $a \in A$ se le hace corresponder un elemento $m \in M$, tal que m es el elemento mínimo de los sucesores de a que cumple la condición de pertenencia a M.

La relación de orden total en C permite crear la biyección entre un cierto día, d, y el conjunto de sus sucesores: $d \Leftrightarrow In(Succ(d,1,C),TheEnd)$. Definimos el conjunto de los sucesores de d en un conjunto cualquiera M como $B = In(Succ(d,1,C),TheEnd) * M$. Dependiendo de la cardinalidad de B, existe una correspondencia biunívoca entre un segmento de los naturales, (1,n) o N mismo y los elementos de B tal que a cada n de este conjunto corresponde el elemento Succ(d,n,A). Idénticos argumentos pueden establecerse para los predecesores de d en A.

Proposición: Succ(A,M) = M*Succ(A,A+M)

Dem: Si cierto elemento m pertenece a Succ(A,M) , existirá un predecesor en A de mínima distancia respecto de este elemento m, $Succ(m,-1,A)$, de modo que no existirá ningún elemento de A situado entre ambos. Por tanto m pertenecerá a Succ(A,A+M). De modo que $Succ(A,M) \subset M * Succ(A,A+M)$. Ahora bien, todo elemento perteneciente a Succ(A,A+M) que pertenezca a M es, por definición un sucesor de A en M de lo que se sigue que $Succ(A,M) \supset M * Succ(A,A+M)$ lo que concluye la prueba.

La proposición anterior es interesante porque permite la obtención de un sucesor de un conjunto en otro mediante la aplicación de la función sucesor de un conjunto incluido en otro, operación ésta última idéntica al cálculo del conjunto sucesor de cualquier conjunto en C.

La aplicación recursiva de la función sucesor permite definir el sucesor enésimo de un conjunto temporal en otro, como el enésimo elemento de dicho conjunto que sucede a cada elemento del conjunto origen. Es claro que el sucesor n-ésimo de un conjunto en otro, puede como la operación de sucesor (n-1)-ésimo del Succ(A,M,1). Puesto que $Succ(A,M,1) \subset M$, todas los sucesores de orden mayor se pueden calcular como el sucesor de un conjunto incluido en otro.

3.5.1 El sucesor de una fecha en una unión de sucesores

Proposición : El sucesor de una fecha en un conjunto de tipo Range(Ct,n,m), con n menor o igual a m, o es el sucesor en C o es el sucesor en el conjunto Succ(Ct,n).

Dem:

$$Succ(d, Range(Ct, n, m)) \in In(Succ(d, C), TheEnd) * Range(Ct, n, m)$$

El sucesor es precisamente el mínimo del conjunto de la derecha que existe debido a la acotación inferior del conjunto.

Si este mínimo es $Succ(d, C)$ la proposición resulta verdadera.

Supongamos por tanto que Succ(d,C) no es dicho mínimo. Supongamos tambien que el mínimo pertenece a Succ(Ct,r), r>n. El predecesor de este elemento pertenece a In(Succ(d,C),TheEnd). Tambien pertenece a Range(Ct,n,m) ya que pertenece a Succ(Ct,r-1) con r>n. Por tanto el elemento elegido no puede ser el mínimo buscado.

3.6 Fechado en tiempo discreto

Llamamos **fechado** (básico) a una partición del tiempo en intervalos. En el tiempo diario o en cualquier otro tiempo discreto, podemos construir fechados mediante la aplicación biunívoca que hace corresponder una partición en intervalos a cada conjunto temporal. Esta intervalación se construye haciendo que a cada elemento (día) del conjunto temporal corresponda un intervalo que lo tiene como elemento mínimo.

Un fechado es el soporte de información dinámica, particularmente de series temporales. **Una serie temporal es, de hecho, una sucesión de valores numéricos conocidos y desconocidos de longitud infinita, de tal modo que cada dato se corresponde con un elemento del fechado en el que la serie está definida**.

Es claro que dos series con idéntico fechado son operables entre sí y que podemos extender cualquier función de los reales a funciones de series temporales sin más que definir la función extendida como la función real aplicada a cada elemento del fechado. El único requisito es definir como se opera con valores desconocidos. En general cualquier función u operación en la que intervienen valores desconocidos produce el valor desconocido. La excepción son las funciones lógicas (un desarrollo de las ventajas y problemas que dicho tratamiento encierra se encuentra en el documento **Álgebra de series**).

Debido a la correspondencia entre fechado y conjunto temporal, desde el punto de vista de la implementación del tiempo diario el concepto de fechado resulta innecesario, aunque sin él la semántica de todo el sistema puede resultar oscura.

3.7 Variables calendario

Una variable calendario es una serie temporal determinista, es decir es una serie que carece de valores desconocidos en ninguna *fecha* perteneciente a su fechado. Es, por tanto, una serie de longitud infinita (número de datos infinito).

CalVar(Ct,Fechado) es la serie temporal en el fechado definido como argumento y que en cada intervalo toma el valor del cardinal del número de días de la intersección de dicho intervalo y el conjunto temporal Ct.

4. Tiempo Continuo

Los sistemas de medición que producen información dinámica, y particularmente, series temporales, son intrínsecamente discretos, aunque una frecuencia de medición muy alta puede dar apariencia de continuidad. Pero, naturalmente, no existe *la frecuencia básica* para representar cualesquiera sucesos dinámicos. De hecho, conforme se avanza en la revolución informativa poseemos datos en frecuencias más altas, susceptibles de utilización en sistemas de atención a la demanda. Adicionalmente, una parte de la teoría de procesos estocásticos, principalmente con aplicación al campo financiero, está desarrollada sobre la base de tiempo continuo. Todo ello concede gran importancia al hecho de poseer una representación del tiempo que permita el manejo de datos en cualquier frecuencia.

En la representación discreta un conjunto temporal (días, horas o cualquier otra unidad básica) y una intervalación del tiempo que toma como puntos iniciales cada elemento del conjunto temporal son operativamente indistinguibles aunque desde el punto de vista semántico sean objetos muy diferentes. Si aceptamos que nuestro modelo básico de representación del tiempo es bien la recta real, bien la recta racional, inevitablemente perdemos tan conveniente simplificación.

4.1 Funciones intervaladoras y fechados

Sea $C = \Re$, el conjunto temporal universal.

Sea un conjunto de funciones a las que denominamos **intervaladoras**. Estas funciones son estrictamente monótonas que aplican los enteros en la recta real :

$f_i\colon\ I \to \Re\ ;\ f_i(k) < f_i(k+1),\, k \in I$

A cada función intervaladora corresponde una función que aplica los enteros en una partición del tiempo en intervalos disjuntos semiabiertos. Sea la función g_i tal que

$g_i(k) = \left[f_i(k), f_i(k+1) \right)$, de modo que $g_i(I)$ es una partición del tiempo de la clase enunciada, es decir $g_i(I) = U_{k \in I}\, g_i(k)$. Esta partición recibe el nombre de **fechado**

básico o, simplemente, fechado. Llamamos **fechado genérico** a una subcolección de intervalos perteneciente a un **fechado básico**.

Una colección de funciones $\{f_i\}$ tal que

$f_1(I) \subset f_2(I) \subset ... \subset f_n(I)$ se denomina una colección de intervaladoras armónicas. Los fechados generados por funciones intervaladoras armónicas entre sí, se les denomina armónicos entre sí. Si $f_i(I) \subset f_j(I)$ se dice que la intervalación *j* es más fina que la *i.*

4.2 Medida del tiempo y funciones intervaladoras

La medida del tiempo social se realiza mediante colecciones de intervalaciones armónicas. El conjunto de fechados armónicos que producen, y que denominamos como **fechados primarios** son:

1. Anual,
2. Mensual,
3. Diario,
4. Horario,
5. Minutal,
6. Secundal

Naturalmente, podemos agregar cuantas intervalaciones deseemos, décimas, centésimas, milésimas de segundo y así sucesivamente. Es claro que el sistema de numeración empleado en la medida del tiempo es peculiar ya que no existe una única base en términos de la cual se formen las unidades de orden superior e, incluso, estas unidades pueden ser irregulares como el caso de días y meses.

Todos los fechados primarios son fechados básicos.

Es claro que culturas distintas de la nuestra poseen formas de medida del tiempo en base a funciones intervaladoras distintas. Es claro que siempre podemos incluir en nuestro sistema otros conjuntos temporales. Veremos asimismo, que podemos construir fechados con completa generalidad.

4.3 Fechas

Un elemento de un fechado, un intervalo particular, es un conjunto temporal que se denomina fecha del fechado correspondiente. Así por ejemplo el conjunto temporal Y(2000) es una fecha del fechado anual, es decir un intervalo de la intervalación correspondiente. Una fecha de cualquier fechado, básico o genérico, tiene definidas las funciones sucesor y predecesor en el correspondiente fechado, produciendo una fecha del mismo fechado. A cada fecha de un fechado corresponde un punto inicial. Esta correspondencia se simboliza mediante la función Ini(.). Debido a esta correspondencia a este punto se le denomina asimismo *fecha*. Desde el punto de vista de la representación estos puntos se representan por secuencias de letras minúsculas y números. Por ejemplo: y1990, y1999m12d31, y2004m1d4mi00s27. La gramática de fechas de TOL está, naturalmente, referida a este tipo de objeto, que en su primera interpretación no requiere una gramática especial.

4.4 Relación entre fechas de distintas intervalaciones

Una fecha de cierta intervalación está plenamente caracterizada por su punto inicial y la intervalación a la que pertenece.

Cuando dos fechas pertenecen a la misma intervalación mantienen una relación de orden. Una función que expresa dicha relación de orden es la que dadas dos fechas produce el valor 1 si la primera antecede a la segunda, 0 si se ambas fechas son idénticas y –1 si la primera fecha sucede a la segunda.

Podemos construir una función similar para fechas de distintas, o iguales intervalaciones, que generalizan la función anterior. Esta función puede describirse del siguiente modo:

$$Ord(fecha_i, fecha_j) = \begin{cases} 1 \quad si \quad Ini(fecha_i) < Ini(fecha_j) \\ -1 \; si \quad Ini(fecha_i) \geq Ini(Succ(fecha_j, j)) \\ 0 \quad en\ otro\ caso \end{cases}$$

donde la función Ini(.) produce, como se indica en el punto precedente, el mínimo de la fecha correspondiente y los subíndicies i,j identifican las intervalaciones a las que pertenecen las respectivas fechas, siendo i más fina que j , $i \prec j$.

Puede verse que el indicador de inclusión de dos fechas de intervalaciones, posiblemente distintas, viene dado por la función Not(Ord(.)).

Asimismo podemos definir la función

$$Q(fecha_i, fecha_j) = \begin{cases} n^{-1} \quad si\ fecha_i \subset fecha_j \\ 0 \quad en\ otro\ caso \end{cases}$$

donde *n* es el número de intervalos de la intervalación i que están incluidos en el intervalo $fecha_j$ de la intervalación j.

4.5 Conjuntos temporales

La unión de una subcolección de fechas de un fechado es un conjunto temporal.

Sea una función $g_i(.)$ que particiona el tiempo en intervalos. Si construimos una partición de los enteros en subconjuntos, bien mediante una función módulo (que es el caso de la partición en días de la semana de la intervalación diaria), bien mediante algún otro procedimiento (la partición de los enteros en distintos días de mes desde el día 1 al 31), podemos expresar ciertos conjuntos temporales que llamaremos primarios en la forma

$\bigcup_{j \in J} g_i(j), \quad J \subset I$, donde *I* es el conjunto de los enteros.

Ejemplos de esta forma de denotar conjuntos temporales son :

$$
\begin{aligned}
&WD(i) \quad i \in \{1,..,7\} \\
&M(i) \quad i \in \{1,...,12\} \\
&D(i) \quad i \in \{1,...,31\} \\
&H(i) \quad i \in \{0,...,23\} \\
&Mi(i) \quad i \in \{0,...,59\}
\end{aligned}
$$

donde, para cada entero *i*, el primer y el tercer conjunto son la unión infinita de intervalos diarios, el segundo es la unión infinita de intervalos mensuales, el cuarto es la unión infinita de intervalos horarios y el quinto denota uniones infinitas de intervalos minutales.

Es claro que podemos definir (Easter y otros conjuntos especiales) como cierto subconjunto de intervalos pertenecientes a la intervalación diaria. Del mismo modo podemos definir Bisiesto a cierto subconjunto de la intervalación anual.

Los distintos conjuntos primitivos pueden operarse mediante la unión finita, la intersección finita y la diferencia finita de conjuntos produciendo nuevos conjuntos derivados, definiendo así un álgebra de Boole.

4.6 Intervalación propia de un conjunto temporal

Puesto que todos los conjuntos temporales primarios se construyen como una unión de elementos de una intervalación es claro que **todo conjunto** del álgebra definida **es** de hecho **una unión de intervalos de idéntica intervalación**. Naturalmente un conjunto temporal puede expresarse en términos de varias intervalaciones aunque no de todas. En general existe una intervalación a la que llamaremos propia que se corresponde con cada conjunto.

$f_i(I)$ es la intervalación propia del conjunto *Ct* ($g_i(I)$ es el fechado propio) si y sólo si

1. $g_i(I)$ es un fechado primario

2. $Ct = \bigcup_{h \in H} g_i(h), H \subset I$

3. Si $Ct = \bigcup_{v \in V} g_j(v), V \subset I$, $j \neq i$ entonces $f_i(H) \subset f_j(V)$

Todo conjunto temporal puede escribirse sin recurrir a familias de intervalos procedentes de una intervalación más fina que su intervalación propia. A efectos de ciertas evaluaciones podemos actuar como si la intervalación propia del conjunto temporal fuese la indicada la intervalación más fina presente (indirectamente) en su definición sintáctica. A esta intervalación la llamamos intervalación pseudo-propia de un conjunto temporal. Esto supondrá sobrecoste computacional sólo cuando la expresión que define el conjunto, involucre familias de conjuntos (de intervalación más fina) innecesarias, lo que es presumible que ocurrirá pocas veces.

4.7 Construcción de fechados básicos

Un conjunto temporal cualquiera intersecado con un fechado produce una subcolección de intervalos de la intervalación correspondiente. Esta subcolección de puntos puede emplearse en dos modos distintos:

1. Para seleccionar una subcolección de intervalos de la intervalación primaria indicada y

2. Para construir una nueva intervalación de tal modo que cada punto indica el comienzo de un intervalo o *fecha*.

Los resultados de ambos procederes tienen muchas semejanzas. En el primer caso tenemos un conjunto de intervalos pertenecientes a cierta intervalación determinada que no recubren la recta temporal. En el segundo caso se obtiene una colección de intervalos que, excepto en el caso de utilizar el conjunto universal, C, como selector de puntos, contienen intervalos no pertenecientes a la intervalación primaria utilizada. En este segundo caso, sin embargo, la intervalación obtenida recubre la recta temporal. Desde un punto de vista sintáctico ambas colecciones de intervalos pueden distinguirse mediante un valor binario.

Una colección numerable no finita de intervalos de cualquiera de las dos clases descritas recibe el nombre de **fechado**, La segunda clase de tales fechados se llaman **recubridores,** mientras que los pertenecientes a la primera clase se denominan no recubridores. Debe notarse que un fechador recubridor es exactamente homólogo a los fechados disponibles en las actuales representaciones discretas. Es claro, asimismo, que en ambas clases de fechado la función sucesor está bien definida.

Sintácticamente ambos tipos de fechados pueden expresarse como

Fechado(Fechado fec, ConjuntoTemporal ct, Real r), donde si r=1, se entiende que el fechado recubre la colección fec y por tanto es recubridor si fec es recubridor; si r=0 entonces el fechado resultante no es recubridor.

Debe notarse que la función fechado exige la existencia de fechados primarios.

Reservamos el término intervalación finita al conjunto de intervalos obtenidos de la intersección de cierta intervalación primaria y un conjunto temporal si ésta es finita (o vacía).

4.8 Funciones sucesor de conjuntos temporales

En el álgebra discreta basada en la intervalación diaria la función sucesor se define de modo natural como la traslación de un conjunto, un número de días. Con distintas intervalaciones del tiempo aparecen distintas funciones sucesor, una por cada intervalación. Estas funciones deben considerarse detenidamente. Los problemas quizá puedan verse de modo muy simple con algunos ejemplos.

Sea el conjunto In(y1996,y2000m12d31) y consideremos la traslación de orden anual que podríamos denotar por Succ(In(y1996,y2000m12d31),Anual,1). Esta expresión tiene un sentido unívoco: produce el conjunto In(1997,y2001m12d31). Puede observarse que, sin embargo, la longitud del conjunto origen es un día mayor que la del conjunto imagen.

Succ(Day(y1996m2d29),Anual,1) no puede ser otra cosa que el conjunto vacío, lo que es coherente con el ejemplo previo. En efecto, la distinta longitud de los intervalos mensuales y anuales provoca que si a cierto conjunto le aplicamos la función sucesor en cierta intervalación de longitud variable es posible que obtengamos resultados inesperados por el usuario.

*Otro ejemplo semejante es: Succ(M(1)*D(31),Mensual,1) es el conjunto vacío ya que el día 31 no existe en Febrero.*

Existen varias formas de eludir ese tipo de problemas:

- Definir una función traslación, temporalmente invariante (a diferencia de ciertas intervalaciones que son de longitud variable)

- Permitiendo para cada conjunto temporal, sólo traslaciones en la intervalación propia o pseudo-propia y en las intervalaciones más finas que ésta.

4.9 Variables calendario en la representación continua

Las variables calendario se extienden a la nueva representación del tiempo tomando como unidad de medida el día. Siguen manteniendo la misma definición anterior, aunque ahora es posible que una variable calendario tome valores fraccionarios. Así, en la representación continua, **CalVar(Ct,Fechado)** mide la longitud de Ct contenida en cada subintervalo del Fechado.

A efectos de evaluación, un conjunto temporal puede intervalarse en términos de la más fina de las dos intervalaciones: la intervalación pseudo-propia y la intervalación en la que se construye el fechado. A partir de aquí la forma de evaluar una variable calendario es semejante a la de la representación discreta del tiempo

4.10 Variables indicador

Las variables indicador son variables binarias que establecen si un conjunto temporal interseca o no con cada intervalo de un fechado. La construcción de series indicador es inmediata.